رياضة 2

GS102

للفصل الثاني

هذا العمل من اعداد:

اتحاد طلبة كلية التقنية الالكترونية - طرابلس

facebook.com/E.T.studentunion

e.t.studentunion@gmail.com

* Derivatives - التفاضل *

* يقال للدالة قابلة للاشتقاق أو التفاضل إذا توفر شرطان :-

1. $f(x) \to a$ عند لها وجود

2. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \to x=a$ لها وجود عند

ويكون التفاضل هو :

$$\frac{d}{dx} f(x) = f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

* نظريات - Thms :-

1. $\frac{d}{dx} c = 0$
2. $\frac{d}{dx} x = 1$
3. $\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$
4. $\frac{d}{dx} c f(x) = c f'(x)$
5. $\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = \frac{d}{dx} f(x) \pm \frac{d}{dx} g(x)$
6. $\frac{d}{dx}[f(x)\cdot g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$
7. $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$, $g(x) \neq 0$
8. $\frac{d}{dx} f^n(x) = n f^{n-1}(x) \cdot f'(x)$
9. $y = f(u)$, $u = g(x)$

   $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ السلسلة

* Examples - أمثلة محلولة *

1- باستخدام التعريف أوجد $f'(x)$:

$f(x) = x^2 - 3x + 1$, $f(x) = \sqrt{x}$

Sol:

$$\therefore f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - 3(x+h) + 1 - (x^2 - 3x + 1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2hx + h^2 - \cancel{3x} - 3h + \cancel{1} - \cancel{x^2} + \cancel{3x} - \cancel{1}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(2x + h - 3)}{\cancel{h}}$$

$$\therefore = 2x - 3$$

$$\therefore f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x} + \cancel{h} - \cancel{x}}{\cancel{h}(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

---

2. باستخدام النظريات أوجد $f'(x)$:

$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 18x + 2\sqrt{x} - 15$, $f(x) = (3x-1)(x^2+5)$,

$f(x) = \frac{3x-4}{2x+5}$, $x \neq -\frac{5}{2}$, $f(x) = (x^3 + 5x^2 - 4)^6$

Sol:

$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 18x + 2\sqrt{x} - 15$ ($2x^{\frac{1}{2}}$)

$\therefore f'(x) = 2(3x^2) - 6(2x) + 18(1) + 2(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}) - 0 = 6x^2 - 12x + 18 + \frac{1}{\sqrt{x}}$

$f(x) = (3x-1)(x^2+5)$

$\therefore f'(x) = (3x-1)\cdot 2x + (x^2+5)\cdot 3 = 6x^2 - 2x + 3x^2 + 15 = 9x^2 - 2x + 15$

$f(x) = \frac{3x-4}{2x+5}, \quad x \neq -\frac{5}{2}$

$\therefore f'(x) = \frac{(2x+5)\cdot 3 - (3x-4)\cdot 2}{(2x+5)^2} = \frac{\cancel{6x} + 15 - \cancel{6x} + 8}{(2x+5)^2} = \frac{23}{(2x+5)^2}$

$f(x) = (x^3 + 5x^2 - 4)^6$

$\therefore f'(x) = 6(x^3 + 5x^2 - 4)^5 \cdot (3x^2 + 10x) = 6x(x^3 + 5x^2 - 4)^5 \cdot (3x + 10)$

---

3. أوجد y' لكل مما يأتي :

$x^2 + y^2 + 3x - 4y - 1 = 0$

$y^2 + 5xy - 3x^2 + 7x - 2y = 13$

Sol:

$x^2 + y^2 + 3x - 4y - 1 = 0 \quad \therefore 2x + 2yy' + 3 - 4y' = 0$

$2yy' - 4y' = -2x - 3 \quad \therefore y'(2y - 4) = -2x - 3 \quad \therefore y' = \frac{-2x-3}{2y-4}$

$y^2 + 5xy - 3x^2 + 7x - 2y = 13 \quad \therefore 2yy' + 5xy' + 5y - 6x + 7 - 2y' = 0$

$2yy' + 5xy' - 2y' = 6x - 5y - 7 \quad \therefore y'(2y + 5x - 2) = 6x - 5y - 7$

$\therefore y' = \frac{6x - 5y - 7}{2y + 5x - 2}$

---

4. أوجد معادلة المماس عند النقطة $(1,-2)$ إذا كان : $xy^2 - x^2y = 3x + 3$

$\therefore \underbrace{x\,2yy' + y^2}\; \underbrace{- x^2y' - 2xy} = 3 \quad \therefore y' = \frac{3 + 2xy - y^2}{2xy - x^2} \quad \therefore m = \frac{3 + 2(-2) - 4}{2(-2) - 1}$

$\therefore m = \frac{-5}{-5} = 1 \quad \therefore y - y_1 = m(x - x_1) \rightarrow y + 2 = 1(x - 1)$

$x - y - 3 = 0$

* Derivative of other functions *

تفاضل الدوال الغيرجبرية

* 1. الدوال المثلثية :-

1. $\frac{d}{dx}\sin u = \cos u \cdot u'$
2. $\frac{d}{dx}\cos u = -\sin u \cdot u'$
3. $\frac{d}{dx}\tan u = \sec^2 u \cdot u'$
4. $\frac{d}{dx}\csc u = -\csc u \cot u \cdot u'$
5. $\frac{d}{dx}\sec u = \sec u \tan u \cdot u'$
6. $\frac{d}{dx}\cot u = -\csc^2 u \cdot u'$

* 2. الدوال المثلثية العكسية :-

1. $\sin^{-1}x = y \longleftrightarrow \sin y = x \,,\ -1 \le x \le 1 \ \& \ -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$
2. $\cos^{-1}x = y \longleftrightarrow \cos y = x \,,\ -1 \le x \le 1 \ \& \ 0 \le y \le \pi$
3. $\tan^{-1}x = y \longleftrightarrow \tan y = x \,,\ x \in R \ \& \ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$
4. $\sec^{-1}x = y \longleftrightarrow \sec y = x \,,\ |x| \ge 1 \ \& \ y \in [0, \pi/2) \cup [\pi, \frac{3\pi}{2})$
   $[0,\pi] - \{\frac{\pi}{2}\}$
5. $\csc^{-1}x = y \longleftrightarrow$ $|x| \ge 1 \,,\ y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] - \{0\}$

1. $\frac{d}{dx}\sin^{-1}u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
2. $\frac{d}{dx}\cos^{-1}u = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
3. $\frac{d}{dx}\tan^{-1}u = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
4. $\frac{d}{dx}\sec^{-1}u = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} u'$
5. $\frac{d}{dx}\csc^{-1}u = \frac{-1}{u\sqrt{u^2-1}} \cdot u'$
6. $\frac{d}{dx}\cot^{-1}u = \frac{-1}{1+u^2} \cdot u'$

* 3. الدوال الأسية واللوغارتمية :-

1. $\frac{d}{dx}e^u = e^u \cdot u'$
2. $\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$
3. $\frac{d}{dx}\ln|u| = \frac{1}{u} \cdot u' \,,\ u > 0$
4. $\frac{d}{dx}\log_b x = \frac{1}{x}\log_b e$

* Examples – أمثلة محلولة *

1. أوجد $f'(x)$: $f(x) = \sin^3 4x \,,\ f(x) = x^2 \sec^3 5x \,,\ f(x) = \cos 5x^3$

Sol:

$f(x) = \sin^3 4x \quad \therefore f'(x) = 3\sin^2 4x \cdot \cos 4x \cdot 4 = 12\sin^2 4x \cos 4x$

$f(x) = x^2 \sec^3 5x \quad \therefore f'(x) = x^2 \cdot 3\sec^2 5x \cdot \sec 5x \tan 5x \cdot 5 + \sec^3 5x \cdot 2x$

$= 15x^2 \sec^3 5x \tan 5x + 2x\sec^3 5x$

$f(x) = \cos 5x^3 \quad \therefore f'(x) = -\sin 5x^3 \cdot 15x^2 = -15x^2 \sin 5x^3$

2. أوجد $f'(x)$: $f(x)=\sin^{-1}3x-\cos^{-1}3x$, $f(x)=\sec^{-1}x^2$, $f(x)=\tan^{-1}e^{2x}$

Sol:

$f(x)=\sin^{-1}3x-\cos^{-1}3x \quad \therefore f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}\cdot 3+\frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}\cdot 3=\frac{6}{\sqrt{1-9x^2}}$

$f(x)=\sec^{-1}x^2 \quad \therefore f'(x)=\frac{1}{x^2\sqrt{x^4-1}}\cdot 2x=\frac{2}{x\sqrt{x^4-1}}$

$f(x)=\tan^{-1}e^{2x} \quad \therefore f'(x)=\frac{1}{1+e^{4x}}\cdot e^{2x}\cdot 2=\frac{2e^{2x}}{1+e^{4x}}$

3. أوجد $f'(x)$: $f(x)=xe^{-2x}$, $f(x)=x^{\sin x}$, $f(x)=\ln\frac{(3x+2)^4\sqrt{6x-5}}{(8x-7)}$

Sol:

$f(x)=xe^{-2x} \quad \therefore f'(x)=x\cdot(e^{-2x}\cdot -2)+e^{-2x}\cdot 1=-2xe^{-2x}+e^{-2x}=e^{-2x}(-2x+1)$

$f(x)=x^{\sin x} \quad \therefore \ln f(x)=\ln x^{\sin x}=\sin x\ln|x|$

$\therefore \frac{1}{f(x)}f'(x)=\sin x\cdot\frac{1}{x}+\ln|x|\cdot\cos x=\frac{\sin x}{x}+\ln|x|\cdot\cos x$

$\therefore f'(x)=x^{\sin x}\left(\frac{\sin x}{x}+\ln|x|\cdot\cos x\right)$

$f(x)=x^{\sin x}=e^{\ln x^{\sin x}}=e^{\sin x\ln|x|} \quad \therefore f'(x)=e^{\sin x\ln|x|}\left(\frac{\sin x}{x}+\ln|x|\cdot\cos x\right)$

$f(x)=\ln\frac{(3x+2)^4\sqrt{6x-5}}{(8x-7)}=\ln(3x+2)^4+\ln(6x-5)^{\frac{1}{2}}-\ln(8x-7)$

$=4\ln(3x+2)+\frac{1}{2}\ln(6x-5)-\ln(8x-7)$

$\therefore f'(x)=\frac{4}{3x+2}\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6x-5}\cdot 6-\frac{1}{8x-7}\cdot 8=\frac{12}{3x+2}+\frac{3}{6x-5}-\frac{8}{8x-7}$

4. أوجد y' إذا كان : $\tan 3x+e^{xy}+y^2+x^2=5$, $\sin 2y+\ln xy+3x^2=4$

Sol:

$\tan 3x+e^{xy}+y^2+x^2=5 \quad \therefore 3\sec^2 3x+e^{xy}(xy'+y)+2yy'+2x=0$

$3\sec^2 3x+xy'e^{xy}+ye^{xy}+2yy'+2x=0$

$y'(xe^{xy}+2y)=-2x-ye^{xy}-3\sec^2 3x \quad \therefore y'=\frac{-2x-ye^{xy}-3\sec^2 3x}{xe^{xy}+2y}$

$$\sin 2y + \ln xy + 3x^2 = 4 \quad \therefore 2y'\cos 2y + \frac{1}{xy}(xy' + y) + 6x = 0$$

$$\therefore 2y'\cos 2y + \frac{1}{y}y' + \frac{1}{x} + 6x = 0$$

$$y'\left(2\cos 2y + \frac{1}{y}\right) = -6x - \frac{1}{x} = \frac{-6x^2 - 1}{x}$$

$$\therefore y' = \frac{-6x^2 - 1}{x\left(2\cos 2y + \frac{1}{y}\right)}$$

* قاعدة لو بتال : L'Hopital's rule :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)} = \cdots$$

*** Examples – أمثلة محلولة ***

1. أوجد النهايات الآتية باستخدام لوبتال :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{2}} \quad , \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{4+\cos x} - 2}{x - \frac{\pi}{2}} \quad , \quad \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{1 - \cos x^2}$$

Sol:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{2}} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{4+\cos x} - 2}{x - \frac{\pi}{2}} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{2}\frac{-\sin x}{\sqrt{4+\cos x}}}{1} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\sin x}{2\sqrt{4+\cos x}} = -\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{1-\cos x^2} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{\sin x^2 \cdot 2x} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{6x}{4x^2\cos x^2 + 2\sin x^2} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{6}{-8x^3\sin x^2 + 8x\cos x^2 + 4x\cos x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{6}{12x\cos x^2 - 8x^3\sin x^2} = \frac{6}{0} = \infty$$

* الدوال التزايدية والتناقصية - النهايات العظمى والصغرى

(1) إذا كانت: $f=\{(x,y)\,|\,y=f(x)\}\,,\ a,b\in D_f$ بحيث $a>b$

فإن: 1. $f(a)\geq f(b)\to$ تزايدية 2. $f(a)\leq f(b)\to$ تناقصية

(2) في حالة $y=f(x)$ قابلة للاشتقاق على فترة معينة:

1. $f'(x)>0\to$ تزايدية 2. $f'(x)<0\to$ تناقصية

(3) نعوض في $f'(x)$ بقيم أقل من x ولتكن $x-\delta$ ثم نعوض بقيم أكبر ولتكن $x+\delta$ ونلاحظ تغير الإشارة:

1. $+\to-$ عظمى 2. $-\to+$ صغرى

(4) نوجد $f'(x)$ ونساويه بالصفر للحصول على قيم x. نوجد $f''(x)$ ونعوض فيه بقيم x ونلاحظ:

1. $+\to$ صغرى 2. $-\to$ عظمى 3. $0\to$ انقلاب

* Examples - أمثلة محلولة *

1. إذا كانت: $f=\{(x,y):y=1-x^2\}$ أوجد فترات التزايد والتناقص

Sol:

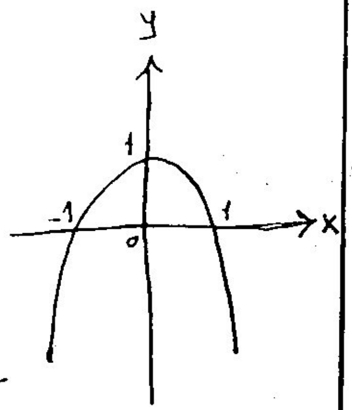
$y=f(x)=1-x^2 \quad \therefore D_f=(-\infty,\infty)$

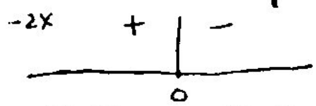
$\therefore(-\infty,0) \quad \because 0>-1 \quad \therefore f(0)>f(-1)\to$ تزايدية

$\because f'(x)=-2x>0\to$ تزايدية

$\therefore(0,\infty) \quad \because 2>1 \quad \therefore f(2)<f(1)\to$ تناقصية

$\because f'(x)=-2x<0\to$ تناقصية





2. إذا كانت: $f(x)=x^4-x^2$ ناقش من حيث التناقص والتزايد.

Sol:

$f(x)=x^4-x^2 \quad \therefore f'(x)=4x^3-2x=2x(2x^2-1)=2x(\sqrt2x-1)(\sqrt2x+1)$

$\therefore\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt2}\right),\left(0,\frac{1}{\sqrt2}\right)\to$ تناقصية

$\therefore\left(-\frac{1}{\sqrt2},0\right),\left(\frac{1}{\sqrt2},\infty\right)\to$ تزايدية

	$(-\infty,-\frac{1}{\sqrt2})$	$(-\frac{1}{\sqrt2},0)$	$(0,\frac{1}{\sqrt2})$	$(\frac{1}{\sqrt2},\infty)$
	−	+	−	+
$\sqrt2x+1$	−	+	+	+
$\sqrt2x-1$	−	−	−	+
$2x$	−	−	+	+

3. أوجد نقط الرجوع ونقطة الانقلاب للمنحنى : $y=f(x)=x^3-12x-3$

Sol:

$f(x)=x^3-12x-3 \quad \therefore f'(x)=3x^2-12=0 \quad \therefore 3(x^2-4)=0$

$\therefore (x-2)(x+2)=0 \longrightarrow x=2,-2 \quad \therefore y=-19, 13$

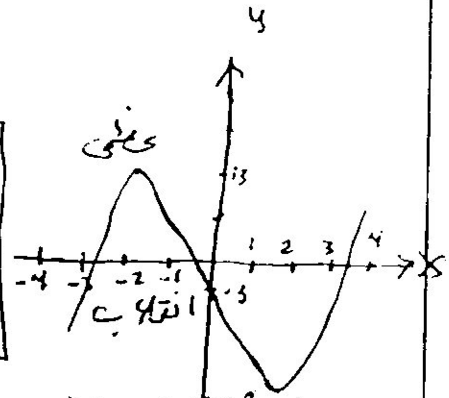
$x=2 \quad \therefore f'(x)= - \longrightarrow +$ صغرى

$x=-2 \quad \therefore f'(x)= + \longrightarrow -$ عظمى

$\therefore f''(x)=6x=0 \quad \therefore x=0 \quad \therefore y=-3$

$x=2 \quad \therefore f''(x)=12 \quad + \longrightarrow$ صغرى

$x=-2 \quad \therefore f''(x)=-12 \quad - \longrightarrow$ عظمى



$\therefore (2,-19)$ صغرى ، $(-2,13)$ عظمى ، $(0,-3)$ انقلاب

	تزايد	تناقص	تناقص	تزايد
$x-2$	−	−	−	+
$x+2$	−	+	+	+
	-2	0	2	

4. أوجد النهايات العظمى والصغرى ونقط الانقلاب للدالة :

$y=f(x)=x^3-6x^2+9x+1$

Sol:

$y=f(x)=x^3-6x^2+9x+1 \quad \therefore f'(x)=3x^2-12x+9=3(x^2-4x+3)=0$

$\therefore (x-3)(x-1)=0 \quad \therefore x=3,1 \quad \therefore y=1,5$

$\therefore f''(x)=6x-12=6(x-2)=0 \quad \therefore x=2 \quad \therefore y=3$

$x=3 \quad \therefore f''(x)=6 \quad + \longrightarrow$ صغرى

$x=1 \quad \therefore f''(x)=-6 \quad - \longrightarrow$ عظمى

	تزايد	تناقص	تزايد
$x-3$	−	−	+
$x-1$	−	+	+
	0	1 2	3

$\therefore (3,1)$ صغرى ، $(1,5)$ عظمى ، $(2,3)$ انقلاب

* Exercises -1- مسائل *

1. بين أيا من المجموعات الآتية متساوية وأيا منها متكافئة:
$A=\{1,2,3\}$, $B=\{2\}$, $C=\{L\ a\ w\}$, $D=\{x \mid 1\leq x\leq 10\}$, $E=\{2,3,5,7\}$, $F=\{x \mid 1<x<3\}$ and $G=\{a, L, w\}$

2. إذا كان: $U=\{x \mid x\in N, 1\leq x\leq 10\}$, $A=\{1,2,3,4\}$ and $B=\{3,4,5,6\}$
أوجد الآتي: $A\cap B$, $A\cup B$, $A-B$, $U-(A\cap B)$, $U-(A\cup B)$, A' and B'

3. اثبت أن: $A=\{1,2,3,4,5\}$ ليست فئة جزئية من: $B=\{x \mid x\in N, x$ زوجي$\}$.

4. كم فئة جزئية في: $A=\{p,q,r\}$ – اكتبها.

5. ارسم بطريقة فن الفئات الآتية:
$U=\{c,s,m,p,y,o,z\}$, $A=\{c,s,z\}$, $B=\{s,m,p\}$ and $C=\{o\}$

6. أي الفئات محدودة وأيها غير محدودة:
$A=\{2,4,6,----\}$, $B=\{x \mid x^2-3x+2=0\}$, $C=\{x \mid x$ عاصمة الدول العربية$\}$, $D=\{x \mid x$ أيام الأسبوع$\}$ and $E=\{1,3,5,---\}$

7. إذا كان: $A=\{x \mid 1<x<9\}$ and $B=\{x \mid x<5\}$ أوجد: $A\cup B$ and $A\cap B$

8. إذا كان:
$U=\{x \mid 1\leq x\leq 9\}$, $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{5,6,7,8,9\}$, $C=\{4,5,6,7\}$, $D=\{1,3,5,7,9\}$, $E=\{2,4,6,8\}$ and $F=\{1,5,9\}$
أوجد: $A\cup C$, $A\cap C$, A', C', $A\cap(C\cup E)$, $C\cup D$, $C\cap D$, D', C', $(A-E)'$, $A-B$, $B-A$, $(A\cap D)-C$, $(C\cap F)\cup(B\cup E)$, $F-D$, $D\cup E$, $D\cap F$ and $D\cup F$

9. اثبت أن:
$(A'\cup B')'\cup(A'\cup B')'=A$, $(A\cup B)\cap A'=A'\cap B$
$(A\cap B)\cup A'=A'\cup B$ and $(A\cup B)'\cup(A'\cap B)=A'$

10. إذا كان: $A=\{1,2,3\}$ and $B=\{1,5\}$ أوجد: $(A\times A)\cup(B\times B)$ and $(A\times A)\cap(B\times B)$

11. إذا كان: $A=\{2,3\}$ and $B=\{7,6\}$ و $C=\{1,5\}$ اثبت أن:
$A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$

12. إذا كان: $A=\{1,5\}$, $B=\{1,6\}$ and $C=\{1,7\}$, $D=\{1,8\}$ اثبت أن:
$(A\times B)\cap(C\times D)=(A\times D)\cap(C\times B)$

13. إذا كان: $A=\{3,4,5\}$, $B=\{2,3\}$ and $C=\{3,7\}$ حقق صحة أو عدم صحة ما يأتي:

$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$, $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$,
$B \times (A \cup C) = (B \times A) \cup (B \times C)$ and $(A \times B) - (C \times A) = [(A - C) \times B] \cup [A \times (B - C)]$

14. إذا كان : $A = \{1, 2, 3\}$ and $B = \{5, 6\}$ أوجد :

$\{(x, y) \mid x > y\}$, $\{(x, y) \mid x \leq y\}$, $\{(x, y) \mid y = x + 3\}$

15. إذا كان : $A = \{1, 2, 3, 4\}$ and $B = \{1, 2, 3\}$ أوجد :

$\{(x, y) \mid x = 2\} \cap \{(x, y) \mid y = 3\}$, $\{(x, y) \mid x = y\} \cap \{(x, y) \mid y = x + 1\}$ and

$\{(x, y) \mid y \geq x\} \cup \{(x, y) \mid y > x\}$

* Exercises -2- مسائل *

1. أوجد قيمة كل ما يأتي :

$|4-8|, |-4+8|, |-4|-|-8|, |-3|^2, |(-3)^2|$
$-|-3|, -(|-5|-2)$

2. أوجد فئة الحل لكل ما يأتي :

I. $5x-6>11$ II. $2-7x\leq 16$ III. $|2x+1|>5$

IV. $3x+2>5x-8$ V. $12\geq 5x-3>-7$ VI. $\frac{5}{7-2x}>0$

VII. $-1<\frac{3-7x}{4}\leq 6$ VIII. $|x-10|<0.3$ IX. $|25x-8|>7$

X. $3x-5<10$ XI. $5>2-9x>-4$ XII. $\left|\frac{2x+3}{5}\right|<2$

3. حل المتباينات الآتية وأوجد فئة الحل :

I. $7-2x\geq -3$ II. $|x+2|<1$ III. $2+7x<3x-10$

IV. $\frac{4}{x^2-9}>0$ V. $\left|\frac{7-3x}{2}\right|\leq 1$ VI. $x^2-10x\leq 200$

VII. $3x^2+5x-2<0$ VIII. $2x^2-9x+7<0$ IX. $\frac{1}{x^2}<100$

X. $2x^2+9x+4\geq 0$ XI. $\frac{1}{x^2}\geq +9$ XII. $\frac{3}{x-9}>\frac{2}{x+2}$

XIII. $\frac{x-2}{x+1}>0$

4. أوجد حل المتباينات الآتية :

I. $x>2+\frac{3x}{4}$ II. $\frac{1}{6}<\frac{1}{x}<\frac{1}{4}$ III. $\frac{1}{2x}<100$

IV. $\frac{3}{x-1}<\frac{2}{x+1}$ V. $\frac{x}{2}\geq 1+\frac{4}{x}$ V. $(x-1)^2\leq 4$

VI. $2x-1<x-2<10+3x$ VII. $\left|\frac{x+1}{x-5}\right|\leq 5$

VIII. $\sqrt{1-x^2}\leq x+2$

* Exercises - 3 - مسائل *

1. إذا كان: $f(x)=x^3+4x-3$ أوجد قيمة: $f(-1), f(0), f(1)$

2. إذا كان: $f(x)=\sqrt{x-1}+2x$ أوجد قيمة: $f(1), f(5), f(10)$

3. إذا كان: $f(x)=2^x$ ، اثبت أن: $f(x+3)-f(x-1)=\frac{15}{2}f(x)$ ، $\frac{f(x+3)}{f(x-1)}=f(4)$

4. إذا كان: $f(x)=x^2-x$ ، اثبت أن: $f(x+1)=f(-x)$

5. أوجد النطاق D_f والمدى R_f للدوال الآتية:

I. $f(x)=4x-3$ II. $f(x)=4-x^2$ III. $f(x)=\sqrt{4-x^2}$

IV. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-4}}$ V. $f(x)=\frac{1}{4-x}$ VI. $f(x)=\frac{1}{x^2-9}$

VII. $f(x)=\sqrt{4-x}$ VIII. $f(x)=\sqrt{x-4}$ IX. $f(x)=\sqrt{x^2-4}$

X. $f(x)=\frac{1}{x^2+9}$ XI. $f(x)=\frac{2x}{(x-2)(x+1)}$ XII. $f(x)=\sqrt{\frac{x}{2-x}}$

XIII. $f(x)=\frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{13-x}}$

$f(x)=\frac{x-1}{x^2-9}$ $\therefore D_f=(-\infty,-3)\cup(-3,3)\cup(3,\infty)$

6. بين مع الاثبات أي الدوال: فردية - زوجية - لا فردية ولا زوجية

I. $f(x)=3x^3-4x$ II. $f(x)=7x^4-x^2+7$ III. $f(x)=9-5x^2$

IV. $f(x)=2x^5-4x^3$ V. $f(x)=2x^3+x^2$ VI. $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

7. بين مع الاثبات أي الدوال أحادية (1-1) أم لا:

I. $f(x)=2x+9$ II. $f(x)=\frac{1}{7x+9}$ III. $f(x)=\sqrt{x}$

IV. $f(x)=2x^2-x-3$

8. إذا كان: $f(x)=\sqrt{2x+1}$ and $g(x)=x^2-3$ أوجد: $(f\circ g)(x), (g\circ f)(x)$

9. إذا كان: $f(x)=3x^2$ and $g(x)=\frac{1}{2x-3}$ أوجد: $f+g, f-g, f\cdot g, f/g$

10. أوجد الدالة العكسية للدوال الآتية:

I. $f(x)=\sqrt{x-1}$ II. $f(x)=3x^2-7, x\in[0,\infty)$

III. $f(x)=x^2-2x+6$ IV. $f(x)=\frac{2x+1}{x-3}, x\in[-1,3)$

Exercises 4 - مسائل

1. ضع في أبسط صورة:

I. $\dfrac{2^{2N+1}\cdot 6^{N}\cdot 9^{N+1}}{(216)^{N}}$

II. $\dfrac{9^{N}\cdot 6^{2N+1}}{81^{N}\cdot 4^{N}}$

III. $\dfrac{(x+\frac{1}{y})^{M}\,(x-\frac{1}{y})^{N}}{(y+\frac{1}{x})^{M}\,(y-\frac{1}{x})^{N}}$

IV. $\dfrac{4^{3N}\cdot 27^{N-2}}{2^{6N}\cdot 3^{3N-2}}$

2. أوجد قيمة المجهول في كل مما يأتي:

I. $2^{x-1}=16$

II. $3(2^{x})=12$

III. $2^{-x}=\frac{1}{64}$

IV. $\log_b 128=7$

V. $2\log(x-2)=6.606$

VI. $\log_5 125=x$

VII. $\log_4 N=3$

VIII. $5.52e^{2x^2}=9.73$

IX. $(0.522)^{x^2}=(1.55)^{x}$

3. أوجد قيمة X:

I. $\log(3x+21)-\log(2x+1)=\log 8$

II. $\log(4x-4)-\log(x+2)=\log 2$

III. $\log x^2-\log(30-2x)=1$

IV. $\ln x+\ln(x-2)=2.303$

V. $\ln 2x+\ln(3x-e)-\ln 8=2$

VI. $\ln x+\ln(3x+2)=4$

4. اختصر

I. $\log 1.25+\log 320-\log 4$

II. $\log 343-\log 25+\log\frac{25}{7}-\log 49$

III. $\log\frac{1}{8}/\log 2$

IV. $\log 3\sqrt{27}/\log 9$

V. $\log\frac{1}{16}/\log\sqrt{2}$

5. إذا كان: $\log 2=0.301$ and $\log 3=0.4771$ أوجد قيمة كل من:

$\log 2.25$, $\log 15$, $\log 0.024$, $\log\frac{4}{3}$, $\log\sqrt{1.8}$

6. اثبت صحة المطابقات الاتية:

I. $(\sin\theta+\csc\theta)^2+(\cos\theta+\sec\theta)^2=\sec^2\theta+\csc^2\theta+5$

II. $2\cos x\sin x+(\cos x-\sin x)^2=1$

III. $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}+\dfrac{1+\cos x}{\sin x}=2\csc x$

IV. $\dfrac{\sec^2 x-1}{\sec^2 x}=\sin^2 x$

V. $(1-\cos x)(1+\sec x)\cot x=\sin x$

VI. $\dfrac{\sin x}{\csc x}+\dfrac{\cos x}{\sec x}=1$

VII. $\tan x\sin x+\cos x=\sec x$

* Exercises -5- مسائل *

1. إذا كان: $f(x)=x+1$, $g(x)=\frac{3x^2+7x+2}{x+2}$ عندما $x\to 3$ (a) وجود فأوجد كلاً من:

$$\lim_{x\to 3}[f(x)+g(x)], \quad \lim_{x\to 3} f(x)g(x), \quad \lim_{x\to 3}\frac{g(x)}{f(x)}$$

2. أوجد قيمة:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^5-32_{\to 2^5}}{x-2}, \quad \lim_{x\to L}\frac{x^{10}-L^{10}}{x^3-L^3}, \quad \lim_{x\to 2}\frac{x^6-64_{\to 2^6}}{x^4-16_{\to 2^4}}$$

3. أوجد قيمة:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-3x}{2x^4-6}, \quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x+1}{2x^3-3x^2-5}, \quad \lim_{x\to\infty}\frac{2x^5+3x^2-x}{3x^4+2x+1}$$

4. أوجد قيمة:

I. $\lim_{x\to 9}\frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$ II. $\lim_{x\to 25}\frac{\sqrt{x}-5}{x-25}$ III. $\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{12+x}-4}$

IV. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+16}-4}{x}$ V. $\lim_{x\to 5}\frac{5-\sqrt{x+20}}{x-5}$ VI. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}$

5. أوجد قيمة:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 3x}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{4\sin 5x}{3x}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{3}{x\csc x}, \quad \lim_{x\to a}\frac{\sin(x^2-a^2)}{x-a}$$

6. أوجد قيمة:

I. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{2x^2+5x-7}$ II. $\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x+2}$ III. $\lim_{x\to -\frac{3}{2}}\frac{2x+3}{4x^2+12x+9}$

IV. $\lim_{x\to -1}\frac{x^2-3x-4}{x^3+1}$ V. $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-3x+2}$ VI. $\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-5x+2}{5x^2-7x-6}$

VII. $\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}$ VIII. $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4}$ IX. $\lim_{x\to 3}\frac{2x^3-6x^2+x-3}{x-3}$

X. $\lim_{x\to -3}\frac{x^2+2x-3}{x^2+7x+12}$ XI. $\lim_{x\to 1}\sqrt{\frac{x-1}{x^2-1}}$

7. إذا كان: $f(x)=x+3$, $g(x)=\frac{x^2-9}{x-3}, x\neq 3$ ناقش اتصال كل من الدالتين.

8. أوجد اتصال الدالة عندما $x=2$ إذا كان:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-4}{x-2}, & x\neq 2\\ 4, & x=2\end{cases}$$

9. ابحث نقط عدم اتصال الدالة:

$$f(x)=\frac{1}{x^4-13x^2+36}$$

10. أوجد قيمة M التي تجعل الدالة متصلة عند $x=5$:

$$f(x)=\begin{cases}x^2+4M, & x\neq 5\\ -M, & x=5\end{cases}$$

Exercises - 6 - مسائل

1. باستخدام التعريف أوجد $f'(x)$ إذا كان:

$f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ ، $f(x) = \sqrt{x} + 1$

2. إذا كان: $f(x) = \dfrac{x+a}{x+b}$ حيث a, b ثابتين وكان $f'(3) = -3$ ، $f(3) = 4$

أوجد a, b .

3. إذا كان: $f(x) = \dfrac{x+a}{x-a}$ وكان $f'(2) = -2$ أوجد a .

4. أوجد $f'(x)$ إذا كان:

I. $f(x) = 10x^2 + 9x - 4$

II. $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2} + \sqrt{x} + 3$

III. $f(x) = 2x + (2x)^{-1}$

IV. $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$

V. $f(x) = \dfrac{1}{1 + x + x^2 + x^3}$

VI. $f(x) = \dfrac{4x - 5}{3x + 2}$

VII. $f(x) = \dfrac{8x^2 - 5x}{13x^2 + 4}$

VIII. $f(x) = \dfrac{3x^2 - x + 8}{2 - 9x}$

IX. $f(x) = (2x^2 - 4x + 1)(6x - 5)$

X. $f(x) = (x^3 - 7)(2x^2 + 3)$

XI. $f(x) = (8x^3 - 2x^2 + x - 7)^5$

XII. $f(x) = \left(\dfrac{3x+4}{6x-7}\right)^3$

5. أوجد y' إذا كان:

I. $5x^2 + 2x^2y + y^2 = 8$

II. $x^2y^3 + 4xy + x - 6y = 2$

III. $(y^2 - y)^4 = (4x^2 + 3x - 1)^2$

IV. $4 - 4xy = (y^2 + 4)^5$

6. أوجد معادلة المماس والعمودى للمنحنيات الآتية:

I. $y = \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$, $x = 3$

II. $x^2 + 4y^2 = 20$ عند $(2, 2)$

III. $y = \tan \frac{1}{2} x$, $x = \dfrac{\pi}{2}$ $(y=1)$

IV. $\dfrac{x}{y} - \dfrac{4y}{x} = 3$ عند $(4, 1)$

Exercises - 7 - مسائل

1. أوجد $f'(x)$ إذا كان:

I. $f(x)=\sin(8x+3)$

II. $f(x)=\tan^2 x\sec^3 x$

III. $f(x)=x^{\cos x}$

IV. $f(x)=e^{\cos 2x}$

V. $f(x)=x^2\sec^3 4x$

VI. $f(x)=\ln\cos^2 3x$

VII. $f(x)=\ln\sqrt[3]{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}$

VIII. $f(x)=e^{\frac{1}{x}}+\dfrac{1}{e^x}$

IX. $f(x)=(10^x+10^{-x})^{10}$

X. $f(x)=\ln\left[\sqrt{6x-1}\cdot(4x+5)^3\right],\ x>\frac{1}{6}$

XI. $f(x)=\tan^{-1}e^{3x}+\cos^{-1}5x$

XII. $f(x)=\left(\sin^{-1}x^2\right)^3$

2. أوجد y' إذا كان:

I. $xe^y+2x-\ln(y+1)=3$

II. $\ln(x+y)=\tan xy$

III. $xe^y-ye^x=2$

IV. $xy-x\sin y+e^{xy}=4$

V. $x\ln y-y\ln x=1$

VI. $\tan^{-1}xy-x^2=2$

3. باستخدام لوبتال رول أوجد النهايات الآتية:

I. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 4x}{\cos 3x-\cos 5x}$

II. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{-x}}{x}=1$

III. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x^2}-1+x^2}{x^4}$

IV. $\lim \dfrac{\ln 3x}{[illegible]}=1$

4. إذا كان: $f(x)=-3x^2+4x$ أوجد: الفترات التزايدية والتناقصية ونقط الانقلاب والنهايات الصغرى والكبرى إن وجدت.

5. إذا كان: $f(x)=x^2-x+6$ أوجد فترات الزيادة والتناقص والنهايات الصغرى والكبرى ونقط الانقلاب إن وجدت.